

Cálculo en varias variables apoyado con software

MSc. Juan Félix Ávila Herrera
Universidad Nacional
javila@una.ac.cr

Resumen

Este trabajo muestra la estrategia utilizada para apoyar con software un curso de cálculo en varias variables. Las herramientas más usadas fueron Mathematica y Graphing Calculator. Se muestra además, entre otras cosas, los materiales desarrollados, los estilos de evaluación aplicados y el impacto en el curso resultante en comparación con el tradicional.

Introducción

Es indudable que la computadora es día con día una herramienta que apoya nuestro diario quehacer. El proceso educativo no escapa a esta realidad y se debe considerar seriamente la necesidad de incorporar esta herramienta en muchas de las disciplinas que se imparten en los centros educativos costarricenses. Esta decisión genera por sí sola un serie de cuestionamientos cuyas respuestas no son del todo sencillas. Se puede empezar preguntando si el equipo docente a cargo de una disciplina está en la disposición de adecuar los contenidos, los textos, las evaluaciones, los laboratorios para hacerle frente al reto de usar software para apoyar un curso. Por supuesto que es mucho más cómodo para un educador seguir empleando la metodología que ha usado desde que empezó a dar clases: ya conoce la teoría, los ejemplos, los ejercicios, la asignación de tiempos, la evaluación en general los recursos que tradicionalmente ha usado. Por otro lado probablemente sabe que el esfuerzo de cambiar el paradigma tradicional a uno en que el software sea protagonista, no necesariamente redundará en una remuneración económica justa. El proceso de capacitación además no es rápido; se requiere de tiempo considerable para dominar con cierta soltura las herramientas computacionales y adquirir la confianza para impartir la clase y aclarar dudas sobre el software correctamente.

Si lo meditamos un momento y caemos en la cuenta de que algunas veces nos hemos sentidos molestos cuando en un curso nos cambian (simplemente) el texto, nos damos cuentas de que la respuesta afirmativa por parte de los docentes de un curso no es en general la esperada. Por otro lado no hay garantía de que el nuevo enfoque sea “mejor”. Hay docentes que se convierten en verdaderos detractores de la computadora y aseguran que este enfoque convierte a los estudiantes en entes que simplemente saben memorizar comandos y presionar teclas, que desconocen el trasfondo teórico del tema que se está abordando y que el software contribuye sencillamente a deformar a los estudiantes. Esta es una verdad a medias y corresponde al correcto o incorrecto uso de la computadora en el aula de clase. Veamos por qué. Si nos cuentan que en primaria se permite usar la calculadora para que los estudiantes de segundo grado realicen operaciones aritméticas, probablemente habrá un consenso de que esta medida es contraproducente. Sin embargo, para los estudiantes que deben realizar un examen de bachillerato en matemáticas, la calculadora es un recurso que en general recomendamos. La razón es simplemente que los estudiantes conforme maduran han demostrado su capacidad para hacer ciertos cálculos en forma manual y se pretende que en las evaluaciones o ejercicios

de mayor nivel, no inviertan tiempo en cálculos que la calculadora puede hacer en forma instantánea. El punto es entonces que es la madurez académica del estudiante la que debe determinar en que medida debe emplear el software en su quehacer estudiantil.

Si un estudiante que toma un curso de ecuaciones diferenciales necesita calcular una integral que requiere usar una sustitución trigonométrica, que es una técnica que él estudió en cálculo en una variable, es razonable que pueda emplear el software para seguir adelante con esta tarea pues el centro de atención del curso no es esa técnica en particular sino un tema que se sirve de ella para un fin más importante. De hecho, cuando el docente toma tiempo de clase para realizar el cálculo en cuestión, esto muchas veces se convierte en un distractor que algunas veces no le permite al estudiante dimensionar el nuevo tema estudiado.

Veamos ahora algunos aspectos importantes en favor del uso del software en el aula de clase. Tal vez uno de las características importantes es la capacidad de realizar ejercicios más difíciles pero con menos esfuerzo. Los docentes en matemáticas normalmente escogemos, al preparar las clases, ejemplos o ejercicios con un grado de dificultad “razonable”. Sin embargo, ahora es posible calcular la potencia 100 de un binomio y no simplemente grados inferiores a 3 ó 4. Esta situación se repite en todo los temas de matemáticas en el que software sea utilizable. Una pequeña regla sería entonces que se debe velar porque el estudiante pueda realizar los casos fáciles en forma manual, pero que sepa cómo hacerlo, a través del software, en casos de cierta dificultad.

Una segunda razón por la que usar software es conveniente, se refiere a la posibilidad de que el estudiante experimente. No es lo mismo memorizar un teorema a descubrirlo por si solo. Usando el software el estudiante está en capacidad conjeturar en forma rápida y esto hace que el aprendizaje sea mucho más significativo. Por supuesto que para implementar esta idea se requiere que se elaboren preguntas y de alguna forma se conduzca al estudiante a descubrir los resultados deseados. Dicho de otro modo, es necesaria una planificación apropiada por parte del docente.

Un ejercicio que podemos realizar con muchos de nuestros ex-alumnos es preguntarles, un semestre después, cuánto recuerdan de la materia que vieron en el curso que tomaron con nosotros o algún otro colega y su capacidad de resolver los ejercicios del curso. Las respuestas son normalmente poco alentadoras, sobre todo si tomamos en cuenta que muchos de los estudiantes toman un curso simplemente porque es un requisito para un grado o materia posterior. De hecho lo que si resulta más admisible es que un estudiante sea capaz de utilizar el software para realizar algún cálculo que esté necesitando para una aplicación particular. A algunos les resulta más fácil retomar el software, consultar la ayuda del mismo y realizar alguna tarea específica. Observamos entonces que no podemos postular el enfoque tradicional como si fuera el verdadero o correcto ni tampoco asegurar que un abordaje alternativo, usando software, no produce resultados similares o superiores.

Una aplicación importante del software es también la de servir como tutor. Hay programas de cómputo para matemáticas que le permiten al estudiante recibir ayuda oportuna sin la necesidad de contar con la asesoría de un humano. En algunos casos el software solo le da la respuesta final de un cálculo, sin embargo el estudiante puede con esta, saber por lo menos al punto al que debe llegar. El estudiante puede usar el software para corroborar si el resultado que obtuvo es correcto o no. Ya no necesita preguntar al profesor o a sus compañeros, o

consultar el libro. El software le ayuda en esto. Esto puede representar algún grado adicional de independencia del estudiante con respecto a su profesor.

Otro de los aspectos que se puede aprovechar con el software es la posibilidad de lograr que el estudiante haga más énfasis en la interpretación de los resultados obtenidos. Se debe entonces diseñar ejercicios o problemas que, a pesar de que el computador hace el “trabajo sucio”, le corresponde al estudiante interpretar los resultados arrojados por el software y proponer la solución final del problema.

Cuando se cuenta con un nuevo recurso que puede venir a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, es necesario hacer algunas adaptaciones para determinar la mejor forma de incorporarlo. Siempre se podrá hallar distintas posiciones. Unos probablemente lo emplearán ampliamente, otros pensarán que es una moda pasajera y que lo “tradicional” es siempre lo mejor. Es de imaginarse que hace muchos años cuando la historia de un pueblo se transmitía de generación en generación en forma verbal, la introducción del material escrito fue objetado por algunos. “Se pierde el sentimiento”, dijeron talvez los más viejos, “ya no es tan interesante”, probablemente dijeron los más jóvenes. Lo cierto es que los libros y en general cualquier material escrito ha sido decisivo en el avance todas las civilizaciones. Normalmente lo que sucede es que las distintas alternativas coexisten hasta que se halla un punto de equilibrio que lo marca la comunidad que emplea esas opciones.

La introducción de la informática en la enseñanza no es una actividad nueva. Casi paralelamente a la construcción de las primeras computadoras modernas, se ha buscado la forma en cómo apoyar la educación mediante sistemas automatizados. Este esfuerzo se denominan frecuentemente CAI (computer assisted instruction) o bien instrucción asistida por computadora. Idealmente se desea crear un tutor informático que sea capaz de diagnosticar al estudiante y enseñar nuevos temas monitoreando apropiadamente su avance. Estos tutores informáticos expertos todavía, hasta donde se sabe, siguen siendo un ideal. Por supuesto han habido avances sorprendentes y las ayudas informáticas día con día son más valiosas. Parece que todavía la presencia del tutor humano es necesaria y que pasarán muchos años antes de que se puedan sustituir.

Con el trabajo que a continuación se presenta, se pretende dar una pequeña contribución en la introducción de la informática en la enseñanza de la matemática. Debe quedar bien claro que no se busca desechar el enfoque tradicional, sino reforzarlo con la introducción de software. No se pretende que el estudiante sea solamente un digitador de comandos. No se persigue que los ejercicios interesantes los resuelva el software. No se intenta que una vez que el estudiante gane el curso, olvide todo lo que aprendió. Nada más alejado de nuestro objetivo. Se desea que el estudiante refuerce el enfoque tradicional con el uso de las nuevas tecnologías informáticas.

Cada vez que se cuenta con un nuevo recurso, se podría caer en la situación de usarlo más allá de lo conveniente. Consideremos el caso del proyector de transparencias. Este aparato, un poco pasado de moda por cierto, es una herramienta útil, pero no se debe usar todos los días y en todas las clases. Si un estudiante llega después de almorzar a una clase en donde se apaga la luz y el aula es caliente, probablemente esta persona se duerma durante la clases. Lo interesante es que esto no tiene que ver necesariamente con que tan motivador sea el expositor. Muchos, después de comer, se duermen mientras ven su programa favorito en la televisión. Simplemente es la naturaleza humana. Los diferentes recursos que la tecnología va

generando deben combinarse para hacer que las clases y en general el proceso de enseñanza-aprendizaje sea más interesante y provechoso. Este es el ideal que se debe tener presente al introducir software en los cursos de matemática y probablemente en cualquier otra disciplina. Sin embargo, se debe tener cuidado con la forma en que se emplee para propósitos didácticos. El nivel y propósito de los ejercicios que se proponen debe ser distinto al usado en el enfoque “tradicional”.

Apoyando con software un curso de cálculo en varias variables

En lo que sigue se relata la experiencia adquirida al utilizar software en el curso de Cálculo III de la Universidad de Costa Rica. Se trata de un curso en varias variables en el que se estudian los temas de vectores, superficies, funciones vectoriales, derivadas parciales, integrales múltiples y análisis vectorial (integrales de línea, integrales de superficie y los teoremas de Green, Gauss y Stokes).

El proceso ha sido rico en experiencias. Estamos en un período de pruebas. Se ha iniciado con un grupo piloto y la expectativa es extender el enfoque a todos los grupos una vez que las condiciones mínimas se den. Ha sido necesario preparar mucho material para este proyecto y lo más estimulante es que cada esfuerzo que se hace enriquece el producto que se les ofrece a los estudiantes. Sin embargo hay tantas cosas por hacer que el proyecto es verdaderamente absorbente.

Es necesario aclarar que en un principio no se contaba con ninguna guía sobre la forma de apoyar el curso con software y la manera de realizar las evaluaciones. Lo cierto es que es necesario establecer una estrategia o metodología sobre los pasos o procesos que deben contemplarse a la hora de introducir el computador en el aula. Por supuesto que no se pretende postular la experiencia obtenida con el curso de Cálculo III como una metodología de inserción de software en un curso, sin embargo es un tema interesante, para una tesis de grado, elaborar a partir de este trabajo y otros similares una estrategia o metodología que busque reducir los tropiezos normales que se topa a la hora de emprender este periplo.

Antes de exponer la forma en que se abordó mediante software el curso de Cálculo III es necesario aclarar que este trabajo no ha terminado aún, que los resultados están todavía lejos de las expectativas, que estos procesos se convierten en una caja de Pandora en la que aparecen nuevas posibilidades, nuevos retos, que es demanda muchísimo tiempo y que el docente se garantiza de que por mucho tiempo no se aburrirá de “hacer siempre lo mismo”. Además aunque se adopte un orden para sugerir la forma de proceder, este orden no corresponde necesariamente al vivido en este proyecto.

Los pasos para apoyar con software el curso de Cálculo III son los siguientes:

- Contar con apoyo institucional. Esto es sumamente necesario pues se requiere comprar licencias, comprar computadoras, tener personal que se encargue de mantener los laboratorios trabajando y con el software en buen estado. En nuestro caso la Escuela de Matemática de la UCR inició bajo la dirección del Dr. Santiago Cambronero una serie esfuerzos en conjunto con la Facultad de Ingeniería para proporcionar los recursos de hardware y software sugeridos.

- Elegir el equipo de trabajo. Debe haber en la institución personal que crea en el proyecto. No debe ser algo impuesto. Lo deseable es más bien que sean los miembros de un departamento o cátedra los que sugieran el proyecto y que sea la institución la que lo respalde. Se debe además designar un coordinador del equipo. En el caso de Cálculo III la idea fue propuesta al autor de este trabajo hace ya algún tiempo por el Ing. Manuel Calvo y estaba en congruencia con mis intereses desde hacía varios años.
- Seleccionar un grupo piloto: al igual que hay docentes que sienten repulsión por las computadoras, hay, aunque en mucho menor grado, estudiantes que también las evaden. Se debe advertir a los estudiantes que se matriculan en plan piloto sobre las diferencias que existen con el curso tradicional y que tendrán, además, una evaluación diferenciada. Por otro lado, es conveniente que los estudiantes tengan acceso al laboratorio fuera de las horas de clase. En Cálculo III, en su primera versión, se tuvo la experiencia de que los estudiantes del plan piloto no fueron informados de que el grupo en que se matricularon empleaba una metodología y evaluación diferente. A los estudiantes disconformes, se les dio entonces la oportunidad de cambiarse a otro grupo.
- Elegir el software a utilizar. Es necesario que el equipo de trabajo se asesore y elija las herramientas computacionales que mejor se adapten a las necesidades del curso en cuestión. Es una tarea importante pues aquí la decisión no es del todo académica y algunos casos priva lo económico. Por otro lado no se debería estar cambiando frecuentemente de herramienta computacional pues esto crea cierta inestabilidad en el proceso. En el caso de Cálculo III se empleó Mathematica 5.0 y Graphing Calculator.
- Capacitar al equipo de trabajo: es apremiante que, una vez elegidas las herramientas, el equipo encargado se familiarice con estas y adquiera la destreza apropiada para impartir lecciones apoyadas con ellas. El docente debe tener la confianza de poder evacuar las dudas, sobre el software y la materia, en cualquier sesión de laboratorio o de clase. Si esta etapa no se ejecuta, algunos profesores dejarán a los estudiantes solos en los procesos y comenzarán a boicotear el proyecto. Es responsabilidad del coordinador del equipo vigilar y procurar que estas situaciones no ocurran.
- Elaborar el programa del curso: una vez que el equipo se familiarice con las herramientas seleccionadas es necesario determinar la forma en que serán expuestos y evaluados los contenidos del curso. Esto debe hacerse con mucho cuidado pues al agregar la computadora al curso tradicional, se aumenta casi automáticamente los contenidos, pues se debe dedicar buena parte del tiempo lectivo a utilizar el software seleccionado. En Cálculo III se mantuvo casi en su totalidad los contenidos originales del curso tradicional. Sin embargo, el desarrollo de funciones en varias variables mediante el teorema de Taylor, es un cálculo normalmente muy laborioso que es preferible dejar al software Mathematica 5.0. Para el caso de multiplicadores de Lagrange se elaboró también un programa que resuelve los casos usuales. En su primera versión, el curso recibió poco apoyo con el software, no obstante en los dos últimos semestres se ha incrementado considerablemente la ayuda del computador. Además el porcentaje de la nota dedicado a la valoración del empleo del software fue inicialmente de un 10% y actualmente están en 30%.
- Preparar el material del curso: El software por si solo muchas veces es poco productivo. Se requiere que el docente le muestre al estudiante la forma en cómo

tomar provecho de él y aplicarlo apropiadamente. Esta etapa toma bastante tiempo y está íntimamente ligada al proceso de capacitación del equipo de trabajo. Para cada tema del curso se debe contar con ejemplos o programas que resuelvan, mediante el software, los problemas típicos. En cada tema se debe preparar una práctica guiada que los estudiantes deberán desarrollar en el computador. Esto se puede hacer indicando algunos ejercicios del libro texto que deben resolverse con la ayuda del software o bien preparando una lista de problemas que el equipo mismo puede crear usando el software seleccionado. Eventualmente se puede incluir en la práctica algún comando que se use más adelante. Este material puede consignarse en un disco compacto conjuntamente con aquellas herramientas que se necesiten a lo largo del curso. En Cálculo III se ha desarrollado una colección de programas en Mathematica y de archivos en Graphing Calculator para que el estudiante los emplee en su tiempo de laboratorio. Estos archivos conjuntamente con algunos documentos en formato PDF (elaborados para un proyecto similar en la Escuela de Informática de la UNA), y que explican como usar las herramientas, se les entregan a los estudiantes en un CD.

- **Contar un texto de clase:** En la actualidad esta tarea no es tan simple pues hallar un libro que se adecue exactamente a las necesidades del curso propuesto por el equipo no es tan simple de hallar. La mayoría de libros ofertados incluyen solo algunos ejercicios que pueden resolverse con la ayuda de una calculadora programable o de un computador. Sin embargo, por razones probablemente comerciales, los textos se abstienen de casarse con un software específico debido a que esta decisión reduce significativamente el número de lectores. En Cálculo III la situación fue la siguiente: los estudiantes asisten a clases dos veces por semana, una vez en aula tradicional y la otra, en un laboratorio de cómputo. Sin embargo para el buen desempeño del curso no es necesario emplear el computador siempre. En efecto, los monitores de las computadoras ocultan a los estudiantes y es difícil entonces dar la clase pues muchos aprovechan el tiempo para hacer otras tareas tales como ver sus correos, hacer trabajos de otros cursos, etc. Se desarrolló entonces un material escrito que los estudiantes adquieren al inicio del curso en el que se presenta todo el curso. Los ejemplos están completamente desarrollados pero estratégicamente se han eliminado algunos cálculos para obligar al estudiante a seguir la exposición del profesor y de esta forma procurar que no se aburran. Se creó además un documento para que el profesor lo use junto con un proyector de multimedios. Los documentos son casi idénticos en contenidos pero el material del profesor, que por cierto no omite detalles, se presenta en forma más apropiada, a saber, el texto es más angosto para poder ser ampliado fácilmente, hay menos texto por página, los ejercicios y sus soluciones están en páginas separadas, si es necesario un mismo dibujo, o ecuación, está en dos páginas consecutivas, etc. El documento del estudiante es de unas 325 páginas y el del profesor de más de 1200. Afortunadamente usando código Latex y macros se puede fácilmente generar dos documentos a partir de un mismo archivo fuente. Se está trabajando además en una versión en PDF para el estudiante que incluya sonido y video y con la que pueda contar al principio del curso.
- **Definir la forma de evaluar:** Este proyecto obliga a replantear muchos aspectos tales como la evaluación y los contenidos del curso. Es importante aclarar que los estudiantes del plan piloto de Cálculo III tienen un recargo en cuanto al contenido del curso, a saber, el aprender a usar el software. Mathematica es una herramienta muy poderosa que permite hacer matemáticas en casi cualquier área: álgebra, ecuaciones

diferenciales, cálculo, etc. Sin embargo la curva de aprendizaje es algo lenta. La otra herramienta Graphing Calculator es bastante más simple de usar. Ambas se complementan muy bien para efectos de cálculo en varias variables, pues las capacidades gráficas de Mathematica no son tan buenas como las de Graphing Calculator. La evaluación del grupo piloto es mixta: 70% con el enfoque tradicional y el resto se hace en el laboratorio. Conforme se adquiera más experiencia en la modalidad del uso de la computadora, esto ira variando. La evaluación puede hacerse de dos formas. Una es elaborar una serie de ejercicios, solicitar a los estudiantes que lo resuelvan, pedir a los estudiantes que graben los resultados (en un archivo) en un disco y luego recogerlos. Esto tiene algunos inconvenientes. Algunas veces los discos se dañan o bien adquieren algún virus que nos puede dar muchos dolores de cabeza. Por otro lado, los estudiantes pueden hacer fácilmente duplicados y propiciar algún tipo de fraude. Como se advierte, este primer enfoque no es muy recomendable. Una segunda forma de evaluar el uso del software es escoger ejercicios que difícilmente se puedan hacer en forma manual y pedir a los estudiantes que escriban las respuestas en una hoja. Las respuestas de los ejercicios no debe ser muy corta pues, en ese caso, son fáciles de copiar. La principal crítica a este enfoque es que evaluamos en forma indirecta el uso del software. Es por esto que los ejercicios deben ser claramente propuestos y deben ser resueltos antes de que se aplique la prueba para evitar dificultades. Se recomienda (sobre todo en los primeros exámenes) dar como ayuda una parte de la respuesta para tranquilizar a aquellos estudiantes que lo han hecho bien y para alertar a aquellos que se han equivocado en algún paso intermedio. Además se puede pedir a los estudiantes que escriban parte del código que emplearon.

- Experimentar y corregir: el equipo debe saber desde un principio que las cosas probablemente no saldrán bien las primeras veces, que se debe aprender de cada experiencia y que los resultados deben ser documentados para enriquecer el curso.

La guía propuesta anteriormente es solamente una luz para indicar el camino a los que se animen a utilizar software en los cursos que imparten.

Conclusión

La experiencia relatada en este documento es fruto del esfuerzo de hacer las cosas diferentes y con el propósito sincero de beneficiar el proceso de enseñanza-aprendizaje. La guía presentada puede ser adaptada para otros cursos de matemáticas y, con algo de imaginación, en cursos de otras disciplinas. Se deja como un reto elaborar una metodología a partir de esta experiencia y de algunas similares presentadas por otros colegas.

Es muy probable que el uso del computador en el aula de clase no sea una moda pasajera, que quienes hoy día se mantienen al margen de esta corriente, tengan la obligación de capacitarse y, muy a su pesar, guardar sus apuntes amarillentos.

Bibliografía

[1] Finney R. L., Cálculo en varias variables, Méjico: Pearson Education, 1999.

[2] Goossens et al, The Latex Companion, USA: Addison-Wesley Company, 1994.

[3] Swokowski E. W., Cálculo con Geometría Analítica, Méjico: Grupo Editorial Iberoamérica, 1988.

[4] Wolfran S. The Mathematica Book. USA: Cambridge University Press, 1996.